ESPCI Paris – Mathématiques 2ème année – Tutorat

Processus de branchements

Tuteur : Pierre Illien (Laboratoire PHENIX, CNRS & Sorbonne Université)

I – Fonctions génératrices de variables discrètes : quelques propriétés utiles

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs positives (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{N}$). La fonction génératrice G_X de X est définie par :

$$G_X(z) \equiv \left\langle z^X \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Prob}(X=n) z^n. \tag{1}$$

1. Calculer $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$. En déduire la moyenne de X notée $\langle X \rangle$ et sa variance $\mathrm{Var}(X) \equiv \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2$ (on suppose que ces quantités existent) en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et $S = X_1 + X_2$. Déterminer G_S en fonction de G_{X_1} et G_{X_2}.
3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées. Soit N un variable aléatoire discrète positive, indépendante de la suite (X_n). On considère la variable aléatoire Z définie par :

$$Z \equiv \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2}$$

   (a) Déterminer la fonction génératrice G_Z en fonction de G_X et G_N.

   (b) En déduire $\langle Z \rangle$ et $\mathrm{Var}(Z)$ en fonction des moyennes et variances de N et X.

II – Un processus de branchement

On s'intéresse au nombre de descendants d'un ancêtre donné. On suppose pour simplifier que chaque individu a un parent unique. A chaque génération, chaque individu engendre un nombre aléatoire de descendants. Soit $X_{i,n}$ le nombre de descendants appartenant à la génération $n+1$ et venant de l'individu i appartenant à la génération n, avec $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$.

Les variables aléatoires $X_{i,n}$ sont supposée être indépendantes et identiquement distribuées, selon la distribution

$$\mathrm{Prob}(X_{i,n} = k) = qp^k, \tag{3}$$

où $0 < p < 1$, $q = 1-p$ et $k \in \mathbb{N}$. q représente la probabilité qu'un parent n'ait aucun descendant.

1. Déterminer la relation de récurrence satisfaite par la variable aléatoire Z_n, qui représente le nombre d'individus à la génération n. On prend la convention $Z_0 = 1$.
2. Calculer la fonction génératrice $G_X(z)$ des variables aléatoires $X_{i,n}$.
3. Montrer que la fonction génératrice de Z_n peut s'écrire comme

$$G_{Z_n}(z) = \frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}, \qquad \text{si } p = q \tag{4}$$

$$G_{Z_n}(z) = \frac{q[p^n - q^n - pz(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - pz(p^n - q^n)}, \qquad \text{si } p \neq q. \tag{5}$$

Montrer qu'on retrouve la première expression à partir de la deuxième en prenant la limite $p \to q$ (on pourra utiliser la règle de l'Hôpital).

4. Calculer la probabilité pour que la descendance d'un ancêtre disparaisse.
5. En utilisant les résultats de la partie I, calculer la moyenne et la variance de Z_n.

   Facultatif : Calculer la distribution de Z_n.
6. Soit $T = \min\{n \mid Z_n = 0\}$ le temps d'extinction du processus. Quelle est la distribution de T ? A quelle condition le temps d'extinction a-t-il une valeur moyenne finie ?