ESPCI Paris – Mathématiques 2ème année – Tutorat

Forme d'un ballon de BoPET

Un ballon de BoPET (polytéréphtalate d'éthylène biaxialement orienté) « classique » est formé de deux disques de BoPET de rayon R, collés à leur périphérie. On se propose de déterminer la forme de ces ballons une fois gonflés (voir Fig. 1). On travaille à pression constante P, trop faible pour étirer les disques. On suppose que le ballon gonflé est axisymétrique. On peut alors le paramétrer par son rayon a et une fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ (voir Fig. 2). On se propose de déterminer la forme du ballon gonflé, c'est-à-dire la fonction f qui maximise le volume sous la contrainte que la longueur $\int_0^a \mathrm{d}x\sqrt{1+f'(x)^2}$ reste constante et donc égale à R.

1. Exprimer le volume du ballon à l'aide de f et a.
2. Écrire la fonctionnelle $I[f, a]$ dont on cherche l'extremum, en introduisant un multiplicateur de Lagrange. En déduire que l'on doit résoudre une équation de la forme :
$$\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) = x. \tag{1}$$
3. Intégrer l'équation précédente. En utilisant des conditions aux limites « raisonnables » pour $f'(0)$ et $f'(a)$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'une intégrale dépendant de a.
4. Déterminer a en utilisant la contrainte.
On donne les relations suivantes : $\int_0^1 \mathrm{d}u/\sqrt{1-u^4} = \Gamma(1/4)\Gamma(1/2)/[4\Gamma(3/4)]$ et $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ ($\Gamma(z)$ est la *fonction Gamma*). Faire l'application numérique avec $\Gamma(1/4) \simeq 3.626$.
5. Calculer la hauteur du ballon et son volume, en fonction de R.
On donne $\int_0^1 u^2\mathrm{d}u/\sqrt{1-u^4} = \Gamma(1/2)\Gamma(3/4)/[4\Gamma(5/4)]$, $\int_0^1 u^4\mathrm{d}u/\sqrt{1-u^4} = \Gamma(1/2)\Gamma(5/4)/[4\Gamma(7/4)]$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Comparer ces caractéristiques avec celles de la plus grande sphère qu'il soit possible de former avec ces disques. Commenter l'efficacité de la sphère.

Figure 1 – Ballon de PET gonflé.

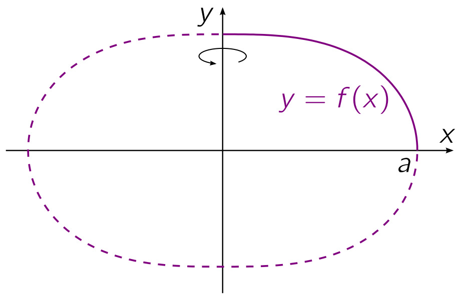

FIGURE 2 – Paramétrisation de la forme axisymétrique du ballon.

6. Démontrons maintenant les conditions aux limites prises plus haut pour f' en 0 et a. Pour cela, écrire la variation de la fonctionnelle $I[f, a]$ par rapport à f et a (i.e., calculer $I[f + \delta f, a + \delta a]$ pour de petites variations $\delta f(x)$ et δa).
7. Quelles sont les conditions pour $f(0)$, $\delta f(0)$, $f(a)$, $\delta f(a)$? Déduire de la variation de la fonctionnelle calculée à la question précédente les conditions aux limites sur $f'(0)$ et $f'(a)$.

Ce sujet a été initialement proposé par Vincent Démery.