ESPCI Paris – Mathématiques 2ème année – Tutorat

Force ponctuelle dans un fluide à bas nombre de Reynolds – Tenseur d'Oseen

Tuteur : Pierre Illien (Laboratoire PHENIX, CNRS & Sorbonne Université)
pierre.illien@sorbonne-universite.fr

On considère le problème suivant : une force $\mathbf{F}$ est exercée sur une particule ponctuelle immergée dans un espace rempli d'un fluide visqueux. Le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dans le fluide et la densité obéissent à l'équation de Navier-Stokes et à l'équation de continuité :

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{F}\delta(\mathbf{r}), \tag{1}$$

$$\partial_t \rho = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}), \tag{2}$$

avec la condition aux limites $\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} |\mathbf{v}(\mathbf{r})| = 0$.

Cette description est pertinente pour décrire le champ de vitesse dans le fluide entourant un micro-nageur comme une bactérie ou une particule colloïdale manipulée par un champ extérieur. L'objectif de ce tutorat est de calculer, dans la limite de bas nombre de Reynolds, les champs de vitesse $\mathbf{v}$ et de pression p dans le fluide, et de montrer qu'ils se mettent sous la forme :

$$p(\mathbf{r}) = \mathbf{g}\cdot\mathbf{F}, \tag{3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}\cdot\mathbf{F}, \tag{4}$$

où $\mathbf{g}$ est le vecteur de pression et $\mathbf{M}$ est le tenseur d'Oseen, que nous allons déterminer.

On utilisera la convention suivante pour la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, f(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\, \hat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{6}$$

On note les vecteurs en gras $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et leur norme $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$.

1. Justifier qu'il est pertinent de se placer dans la limite de bas nombre de Reynolds pour une bactérie se déplaçant dans l'eau à une vitesse de l'ordre de 10 fois sa taille par seconde.
2. Que deviennent les équations de Navier-Stokes et de continuité pour un fluide incompressible, en régime stationnaire, et dans la limite de bas nombre de Reynolds ? Les équations ainsi obtenues sont généralement appelées *équation de Stokes* (à laquelle on rajoute ici la force ponctuelle $\mathbf{F}\delta(\mathbf{r})$) et *condition d'incompressibilité*. Quelle est la propriété permettant de justifier avant tout calcul la forme des solutions pour $p(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ donnée par les équations (3) et (4) ?
3. Quelle opération peut-on appliquer à l'équation de Stokes ainsi obtenue pour éliminer le champ de vitesse ? En déduire que dans l'espace de Fourier on a

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = -\mathrm{i}\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}}{k^2}. \tag{7}$$

4. En utilisant cette fois la transformée de Fourier de l'équation de Stokes, montrer que
$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu k^2}\left[\mathbf{F} - \mathbf{k}\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}}{k^2}\right)\right]. \tag{8}$$
L'objectif est donc désormais de calculer les transformées de Fourier inverses de $\hat{p}(\mathbf{k})$ et $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$.
5. Démontrer que
$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi r}. \tag{9}$$
Pour intégrer dans l'espace des $\mathbf{k}$ il sera utile de considérer un repère où $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_z$. On donne à toutes fins utiles la valeur de l'intégrale de Dirichlet :
$$\int_0^\infty \mathrm{d}u\,\frac{\sin u}{u} = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$
6. De quelle équation la fonction $\phi(\mathbf{r}) = 1/(4\pi r)$ est-elle la fonction de Green ?
7. En utilisant l'équation (9) (qu'on pourra dériver par rapport à une des composantes de $\mathbf{r}$), calculer la transformée de Fourier inverse de $\hat{p}(\mathbf{k})$ et en déduire :
$$p(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3}. \tag{11}$$
Vérifier la dimension de p.
8. Afin de calculer la transformée de Fourier inverse du champ de vitesse, on a besoin de connaitre l'intégrale $I(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{k_i k_j}{k^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Etablir la relation (pour k_0 réel quelconque)
$$\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}\underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{1}{k^4+{k_0}^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)}_{\equiv J(k_0,\mathbf{r})} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{k_i k_j}{k^4+{k_0}^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{12}$$
Que dire de l'intégrale $J(k_0,\mathbf{r})$ au membre de gauche quand $k_0 \to 0$? Pourquoi est-il nécessaire de rajouter ce terme ${k_0}^4$ au dénominateur ?
L'expression de $I(\mathbf{r})$ est obtenue en prenant la limite $k_0 \to 0$ de l'équation (12).
9. **Facultatif :** Etablir la relation
$$J(k_0,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r {k_0}^2}\mathrm{e}^{-rk_0/\sqrt{2}}\sin\frac{k_0 r}{\sqrt{2}} \underset{k_0\to 0}{=} \frac{1}{4\pi k_0\sqrt{2}} - \frac{r}{8\pi} + o(1) \tag{13}$$
10. En utilisant l'équation (13) et le résultat de la question 8, démontrer l'identité valable pour deux indices i et j quelconques :
$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{k_i k_j}{k^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_i r_j}{r^3}\right) \tag{14}$$
où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
11. En déduire l'expression de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et du tenseur d'Oseen.
12. En supposant $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{e}}_x$ et en se plaçant dans le plan $z = 0$, calculer les compostantes $v_x(x,y)$ et $v_y(x,y)$ de $\mathbf{v}$ en coordonnées cartésiennes. A l'aide d'un logiciel, tracer l'allure du champ de vitesse dans le plan $z = 0$.
13. Comment décroit le champ de vitesse à grande distance ? Que peut-on en conclure quand à la portée des interactions hydrodynamiques ?
14. Quel est le comportement de $p(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ dans la limite $r \to 0$? Quel est l'origine de ce comportement ? Comment pourrait-on modifier le modèle pour régulariser le calcul ?