ESPCI PARIS – MATHÉMATIQUES 1ÈRE ANNÉE – TUTORAT

Causalité et relations de Kramers-Kronig

Tuteur : Pierre Illien (Laboratoire PHENIX, CNRS & Sorbonne Université)

Dans tout ce sujet on adoptera la convention suivante pour la transformation de Fourier :

$$\widetilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

1 Causalité et analyticité dans le plan complexe

On considère un oscillateur harmonique amorti, soumis à un forçage dépendant du temps $f(t)$:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{3}$$

pour $t \in]-\infty, \infty[$ et avec $0 < \gamma < \omega_0$. Le forçage $f(t)$ et sa réponse $x(t)$ sont des quantités réelles.

1. Dans un premier temps, on suppose que le forçage est harmonique : $f(t) = F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. On cherche une solution de l'équation différentielle satisfaite par x sous la forme $x(t) = \widetilde{g}(\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Déterminer $\widetilde{g}(\omega)$.
2. Déterminer la parité des parties réelles et imaginaires de $\widetilde{g}(\omega)$. Expliciter les pôles de $\widetilde{g}(\omega)$.
3. $f(t)$ est désormais quelconque. En prenant la transformée de Fourier de l'équation différentielle satisfaite par x, montrer que sa solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

   en écrivant $g(t)$ sous la forme d'une transformée de Fourier inverse.
4. Calculer $g(t)$ à l'aide du théorème des résidus, en séparant les cas $t > 0$ et $t < 0$.
5. Le système respecte-t-il la causalité ? Quelle est la propriété sur les pôles de $\widetilde{g}(\omega)$ impliquant que la causalité soit bien respectée ?

   Remarque : On peut montrer rigoureusement, et on admet pour ce tutorat, qu'il y a équivalence entre cette propriété et la causalité du système.
6. Donner un exemple de situation physique pouvant être modélisée ainsi. Comment appelle-t-on généralement la fonction $\widetilde{g}$?

2 Relations de Kramers-Kronig

Système linéaire.— On considère désormais un système linéaire plus général $\mathcal{L}x(t) = f(t)$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire contenant des dérivations, intégrations, multiplication par des scalaires, et qui ne dépend pas explicitement du temps. La solution peut s'écrire sous la forme générale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

On ne spécifie pas l'expression de g, mais on suppose que le système est causal.

Partie principale de Cauchy.— On rencontre parfois en physique des intégrales de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x, \tag{6}$$

où x_0 est un réel, et où la fonction φ n'a pas de singularité sur l'axe réel et est supposée posséder les propriétés assurant la convergence de l'intégrale en $\pm\infty$. Si $\varphi(x_0) \neq 0$, cette intégrale a une divergence logarithmique à cause de la singularité de l'intégrand en x_0. On peut alors proposer une régularisation particulière de cette intégrale, appelée *partie principale de Cauchy*, et qui s'écrit (si elle est définie) :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x + \int_{x_0 + \epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x \right]. \tag{7}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que, pour un système causal, les parties réelles et imaginaires de $\widetilde{g}(\omega)$ sont reliées à travers cette régularisation.

7. On commence par considérer une fonction φ telle que $\lim_{|z| \to \infty} |\varphi(z)| = 0$. En choisissant un contour d'intégration adapté, en appliquant un lemme de Jordan, et en utilisant le théorème des résidus, montrer la relation :
$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x = -\mathrm{i}\pi\varphi(x_0) - 2\mathrm{i}\pi \sum_{\substack{k \text{ tels que} \\ \mathrm{Im}(z_k) < 0}} \mathrm{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{z - x_0}, z = z_k \right]. \tag{8}$$

8. En appliquant cette relation à la fonction $\widetilde{g}$, montrer que
$$\widetilde{g}(\omega) = \frac{\mathrm{i}}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{g}(x)}{x - \omega} \mathrm{d}x. \tag{9}$$

9. En déduire les relations de Kramers-Kronig :
$$\mathrm{Re}[\widetilde{g}(\omega)] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[\widetilde{g}(x)]}{x - \omega} \mathrm{d}x, \tag{10}$$
$$\mathrm{Im}[\widetilde{g}(\omega)] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[\widetilde{g}(x)]}{x - \omega} \mathrm{d}x. \tag{11}$$

10. Dans le cas général, que dire de la parité de $\mathrm{Re}[\widetilde{g}(\omega)]$ et $\mathrm{Im}[\widetilde{g}(\omega)]$?

11. Montrer que le travail du système $W = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) f(t) \, \mathrm{d}t$ s'écrit
$$W = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \, \mathrm{Im}[\widetilde{g}(\omega)] |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega. \tag{12}$$

    Sur l'exemple de la fonction $\widetilde{g}(\omega)$ déterminée à la partie 1, commenter le signe de W.

    La partie imaginaire de $\widetilde{g}(\omega)$ est donc reliée à la dissipation du système. Que représente sa partie réelle ?