ESPCI Paris – Mathématiques 1ère année – Tutorat

Transformation de Fourier :
applications à la diffusion et aux marches aléatoires

Tuteur : Pierre Illien (Laboratoire PHENIX, CNRS & Sorbonne Université)
pierre.illien@sorbonne-universite.fr

---

1 Diffusion biaisée à une dimension

Dans cette partie, on définira la transformée de Fourier de toute fonction f dépendant de l'espace comme :

$$\widetilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

1. Donner l'expression de la transformée inverse (f en fonction de $\widetilde{f}$).
2. On considère une particule diffusant en temps et en espace continus, à une dimension, et possédant une vitesse de dérive constante $v > 0$. On peut démontrer que la probabilité $P(x,t)$ de trouver la particule entre x et $x + \mathrm{d}x$ à l'instant t obéit à l'équation aux dérivées partielles (appelée *équation de Fokker-Planck*) :
$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - v\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2}$$
où $D > 0$ est le coefficient de diffusion. Trouver l'équation satisfaite par $\widetilde{P}(k,t)$ (on suppose qu'on a les conditions aux limites $\lim_{x\to\infty} P(x,t) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \partial_x P(x,t) = 0$)
3. Résoudre cette équation avec la condition initiale suivante : à l'instant $t = 0$, la particule est localisée en $x = 0$ avec certitude.
4. En calculant la transformée de Fourier inverse, déterminer $P(x,t)$.
5. Questions facultatives :
   (a) Calculer la moyenne et la variance de x en fonction du temps.
   (b) Généraliser le calcul de $P(x,t)$ pour une diffusion en dimension arbitraire d. La position de la particule est repérée par le vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_d)$ et le biais est appliqué dans la direction 1.
6. Peut-on facilement généraliser ce résultat au cas où le coefficient de diffusion D ou la vitesse de dérive v dépendent du point où se trouve la particule ?

2 Marche aléatoire sur réseau

2.1 Marche aléatoire biaisée à une dimension

On considère une marche aléatoire biaisée sur un réseau discret unidimensionnel (c'est-à-dire sur $\mathbb{Z}$) et en temps discret. Le marcheur est initialement en 0. A chaque pas de temps, la particule saute à droite avec probabilité p et à gauche avec probabilité q. On note $P_n(x)$ la probabilité de trouver la particule au site $x \in \mathbb{Z}$ après n pas de temps.

7. Etablir une relation de recurrence entre P_{n+1} et P_n.
8. En introduisant la tranformée de Fourier discrète :

$$\widetilde{P}_n(k) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} P_n(x), \tag{3}$$

déterminer $\widetilde{P}_n(k)$.

9. Démontrer que la transformée inverse s'écrit

$$P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \widetilde{P}_n(k). \tag{4}$$

En déduire une expression de $P_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

10. On s'intéresse maintenant à la dépendance en temps de $P_n(x)$. Pour cela, on introduit la *fonction génératrice associée à* $P_n(x)$ et définie pour $|\xi| < 1$:

$$\widehat{P}(x;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(x). \tag{5}$$

Cette transformation peut être vue comme un analogue de la transformation de Laplace pour les processus en temps discret. En trouvant l'équation satisfaite par $\widehat{\widetilde{P}}(k;\xi)$ (fonction génératrice associée à la transformée de Fourier de $P_n(x)$) à partir du résultat de la question 8, montrer que :

$$\widehat{P}(x;\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{1-\xi(p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} + q\mathrm{e}^{\mathrm{i}k})}. \tag{6}$$

11. En considérant une marche aléatoire symétrique ($p = q = 1/2$), calculer $\widehat{P}(x;\xi)$ à l'aide d'un changement de variable et du théorème des résidus.
12. On peut montrer que la quantité $\lim_{\xi\to 1^-} P(x;\xi)$ représente le nombre moyen de passages du marcheur au point x dans la limite de grand temps. Combien de fois le marcheur revient-il à son point de départ en moyenne ? Une telle marche aléatoire est dite *récurrente.*

2.2 Marche aléatoire symétrique en dimension arbitraire

On considère désormais une marché aléatoire symétrique sur un réseau discret à d dimensions.

13. Montrer que le calcul de $\widehat{P}$ se généralise et donne

$$\widehat{P}(\boldsymbol{x};\xi) = \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\mathrm{d}^d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{1-\frac{\xi}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos(k_j)}. \tag{7}$$

14. En utilisant l'égalité $1/A = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-At}\mathrm{d}t$ pour $A > 0$ ainsi que la représentation intégrale des fonctions de Bessel modifiées :

$$\mathrm{I}_n(z) = \mathrm{I}_{-n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{z\cos\theta}\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{8}$$

montrer que la fonction génératrice $\widehat{P}(\boldsymbol{x};\xi)$ admet la représentation intégrale suivante :

$$\widehat{P}(\boldsymbol{x};\xi) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \prod_{j=1}^{d} \mathrm{I}_{|x_j|}(t\xi/d)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

15. Connaissant le développement asymptotique $\mathrm{I}_n(z) \sim_{z\to\infty} \mathrm{e}^z/\sqrt{2\pi z}$, montrer que la marche aléatoire est récurrente en dimensions 1 et 2, et qu'elle ne l'est pas pour $d \geq 3$.

Vous venez de démontrer le *théorème de Pólya.*