ESPCI Paris – Mathématiques 1ère année – Tutorat

Transformations conformes

Tuteur : Pierre Illien (Laboratoire PHENIX, CNRS & Sorbonne Université)
pierre.illien@sorbonne-universite.fr

Les fonctions holomorphes sont un outil très efficace pour résoudre certains problèmes de physique à deux dimensions vérifiant l'équation de Laplace. Dans ce tutorat, on se propose d'étudier des changements de variable de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, appelés transformations conformes, et possédant certaines propriétés particulières.

1 Généralités sur les transformations conformes

1.1 Propriétés

1. On appelle *transformation conforme* de $\Omega \subset \mathbf{C}$ dans $\Omega' \subset \mathbf{C}$ toute fonction holomorphe telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'une telle transformation préserve les angles. Pour cela, on pourra montrer que si deux courbes γ_1 et γ_2 incluses dans Ω s'intersectent et forment entre elles un angle α au point d'intersection alors il en va de même pour les courbes images. On pourra adopter la notation $\zeta = f(z)$.

2. On rappelle qu'une fonction $\mathcal{F}(x,y)$ est dite harmonique si elle est de laplacien nulle, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Soit $U(\xi,\eta)$ une fonction harmonique et soit f une transformation conforme telle que :

$$\zeta = f(z) = \xi + \mathrm{i}\eta = \xi(x,y) + \mathrm{i}\eta(x,y). \tag{2}$$

Montrer que la fonction $u(x,y) = U(\xi(x,y), \eta(x,y))$ est une fonction harmonique. En déduire que les transformations conformes conservent la propriété "être harmonique".

1.2 Exemples simples

3. On considère la transformation

$$f(z) = \mathrm{e}^z. \tag{3}$$

Soit $\phi_0 \in]-\pi,\pi[$. Quelle est l'image de $\{z \in \mathbf{C} |\ -\phi_0/2 < \mathrm{Im}(z) < \phi_0/2\}$ (bande horizontale de largeur ϕ_0 et centrée sur l'axe réel) ?

4. On considère la transformation

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}. \tag{4}$$

Montrer que l'image du demi-plan $\{z \in \mathbf{C} |\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est le disque unité.

5. Proposer une transformation qui envoie un domaine en forme de bande horizontale sur le disque unité.

6. Comment définir f pour que l'image du domaine $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ ;\ 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$ soit le demi-disque de rayon 1 centré en 0 restreint au demi-plan supérieur (défini à la question 3) ?

2 Le problème de Dirichlet

On appelle problème de Dirichlet [*] le problème constitué de l'équation $\Delta\mathcal{F} = 0$ valable à l'intérieur d'un domaine Ω et $\mathcal{F} = H$ sur le bord de Ω. La solution du problème de Dirichlet pour une domaine de forme arbitraire n'est pas connue. Cependant, quand Ω est le disque unité, la solution est connue et prend la forme suivante en coordonnées polaires (formule de Poisson) :

$$\mathcal{F}(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\phi-\psi)}\mathrm{d}\psi. \tag{5}$$

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation de la chaleur à 2D et en régime stationnaire : $\Delta T = 0$ en supposant que le demi plan $x < 0$ est constitué d'un thermostat qui vaut T_0 pour $y \geq 0$ et 0 pour $y < 0$. La résolution de ce problème est a priori compliquée, mais nous allons voir que l'utilisation d'une transformation conforme et de la solution connue du problème de Dirichlet sur le disque unité permet d'obtenir la solution.

7. Justifier l'intérêt de la transformation conforme $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ pour ce problème.
8. En déduire que si $\theta(\xi,\eta)$ est harmonique sur le disque unité alors

$$T(x,y) = \theta\left(\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}, \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\right) \tag{6}$$

   est harmonique sur le demi-plan $x > 0$ (on note $z = x + \mathrm{i}y$).

9. Montrer que, pour une condition au bord $h(y)$ quelconque, le problème initial

$$\begin{cases} \Delta T(x,y) = 0 & \text{pour } x > 0 \\ T(0,y) = h(y) \end{cases} \tag{7}$$

   peut-être ramené au problème sur le disque unité

$$\begin{cases} \Delta\theta(\xi,\eta) = 0 & \text{pour } \xi^2+\eta^2 < 1 \\ \theta(\cos\phi,\sin\phi) = H(\phi) \end{cases} \tag{8}$$

   avec :

$$H(\phi) = h\left(\frac{1}{\tan\frac{\phi}{2}}\right). \tag{9}$$

10. Dans le cas d'un thermostat à deux températures, donner l'expression de h, puis celle de H, et en déduire la solution pour θ en utilisant la formule de Poisson. On donne l'intégrale (définie pour $a < 1$) :

$$I(a,\phi) = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\psi\frac{1}{1-a\cos(\phi-\psi)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \times \begin{cases} \left(\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-a^2}}{a\sin\phi}\right) & \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi, \\ \left(-\arctan\frac{\sqrt{1-a^2}}{a\sin\phi}\right) & \text{si } \pi \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \tag{10}$$

    Facultatif : Calculer cette intégrale.

11. Calculer enfin la solution pour $T(x,y)$:

$$T(x,y) = T_0\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{x}\right]. \tag{11}$$

[*]. Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, on parle de conditions aux bords de *Dirichlet* quand on prescrit *la valeur de la fonction* sur le bord du domaine, et de conditions aux bords de *Neumann* quand on prescrit *la valeur de sa dérivée* sur le bord du domaine.